Асимптотические решения задачи Коши для нелинейных уравнений мелкой воды в бассейне с пологими берегами

В. Е. Назайкинский
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

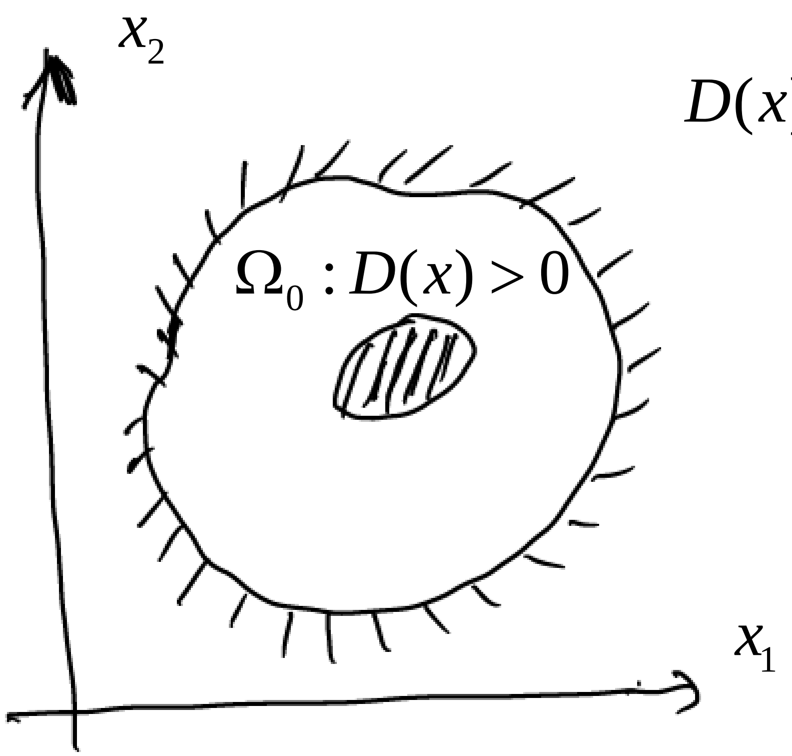
Воркшоп по математическому моделированию
и дифференциальным уравнениям,
посвященный юбилею д.ф.-м.н., профессора А. О. Ватульяна
22—24 ноября 2023 г.

По результатам совместных работ с

- А. Ю. Аникиным
- В. А. Калиниченко
- С. Ю. Доброхотовым
- Д. С. Миненковым
- А. А. Толченниковым
- А. В. Цветковой

Постановка задачи: гравитационные волны на воде

<u>Бассейн с гладким пологим берегом</u>



Функция глубины $D(x)$ определена в окрестности замыкания $\bar{\Omega}_0$ области Ω_0; $D \in C^\infty$;

$$D(x) > 0, \quad x \in \Omega_0; \quad D(x) < 0 \quad x \notin \bar{\Omega}_0; \quad \nabla D(x) \neq 0 \quad x \in \partial\Omega_0.$$

<u>Нелинейная система уравнений мелкой воды</u>

$$\boxed{\begin{aligned} &\eta_t + \langle \nabla, (D(x) + \eta)u \rangle = 0 \\ &u_t + \langle u, \nabla \rangle u + g \nabla \eta = 0 \end{aligned}}$$

η -- возвышение свободной поверхности

u -- горизонтальная скорость

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

g -- ускорение силы тяжести

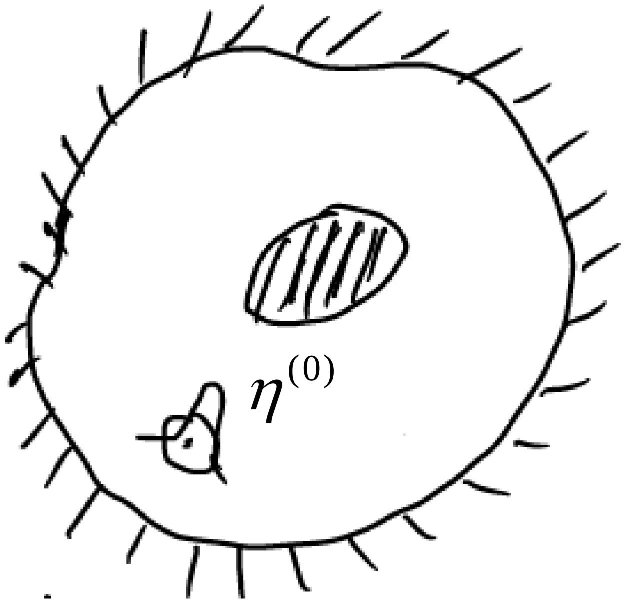
$$t \in [0, T]$$

$$x \in \bar{\Omega}_t = \{x \mid D(x) + \eta(x,t) \geqslant 0\}$$

длина волны много больше характерной глубины

Примеры

Волны цунами

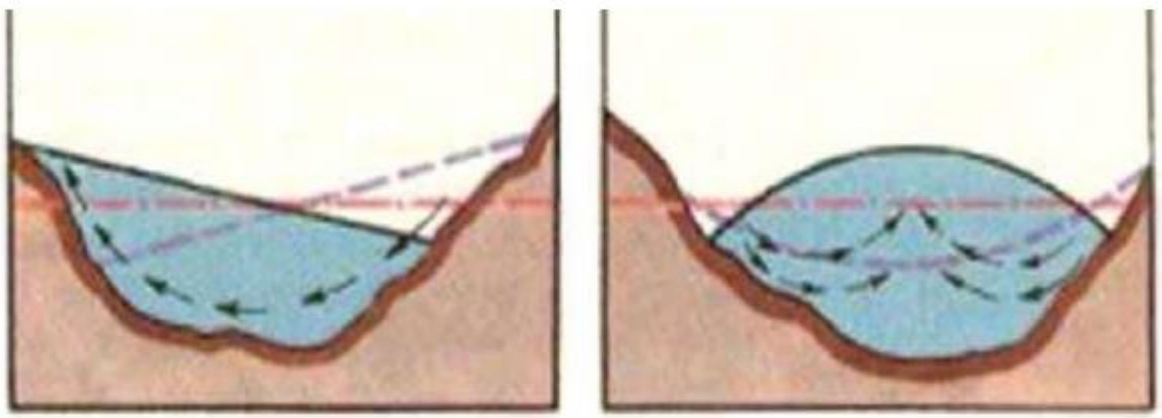


Начальные условия

$$\eta_{t=0} = \eta^{(0)}(x), \quad u\big|_{t=0} = u^{(0)}(x)$$

Поршневая модель цунами:
$\eta^{(0)}$ локализована, $u^{(0)} = 0$

Сейши



Стоячие волны в ограниченном или частично ограниченном водоеме

Будем рассматривать задачу Коши

Задача Коши

$$\begin{cases} \eta_t + \langle \nabla, (D(x)+\eta)u \rangle = 0 \\ u_t + \langle u, \nabla \rangle u + g\nabla\eta = 0 \\ \eta_{t=0} = \eta^{(0)}(x), \quad u\big|_{t=0} = u^{(0)}(x) \end{cases}$$

$$t \in [0, T]$$

$$x \in \bar{\Omega}_t = \{x \mid D(x) + \eta(x,t) \geqslant 0\}$$

Нас интересуют гладкие решения малой амплитуды.
Точнее, мы будем строить асимптотические решения,
считая η и u малыми

Постановка задачи об асимптотике

Введем малый параметр $\varepsilon > 0$ и сделаем замену $\eta \mapsto \varepsilon\eta, \quad u \mapsto \varepsilon u:$

$$\begin{cases} \eta_t + \langle \nabla, D(x)u \rangle + \varepsilon \langle \nabla, \eta u \rangle = 0 \\ u_t + g\nabla\eta + \varepsilon \langle u, \nabla \rangle u = 0 \\ \eta_{t=0} = \eta^{(0)}(x,\varepsilon), \quad u\big|_{t=0} = u^{(0)}(x,\varepsilon) \end{cases}$$

или в векторной форме

$$\boxed{\mathcal{L}\psi + \varepsilon b(\psi, \nabla\psi) = 0, \qquad \psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)}}$$

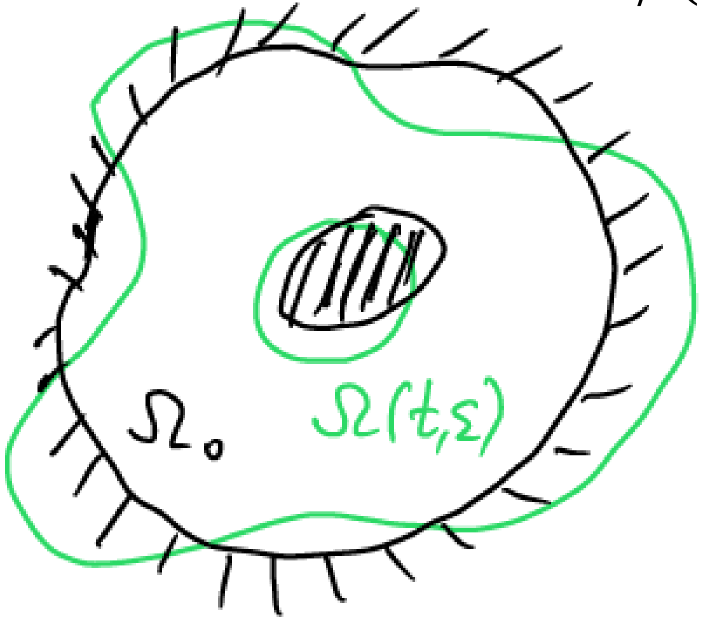
$$\psi = \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial_t & \nabla \cdot D(x) \\ g\nabla & \partial_t \end{pmatrix}, \qquad b(\psi, \nabla\psi) = \begin{pmatrix} \langle \nabla, \eta u \rangle \\ \langle u, \nabla \rangle u \end{pmatrix}$$

Математическое определение (асимптотического) решения

Определение. Решение задачи $\mathcal{L}\psi + \varepsilon b(\psi, \nabla\psi) = 0, \qquad \psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)}$

– это пара $(\Omega, \psi) = (\Omega(t,\varepsilon), \psi(x,t,\varepsilon))$, такая, что

- $\Omega(t,\varepsilon)$ -- область с гладкой границей, гладко зависящая от (t,ε)
- $\psi(x,t,\varepsilon)$ -- гладкая функция от (x,t,ε), определенная при $x \in \bar{\Omega}(t,\varepsilon)$
- $\varepsilon\eta(x,t,\varepsilon) + D(x) > 0$ в $\Omega(t,\varepsilon)$, $\varepsilon\eta(x,t,\varepsilon) + D(x) = 0$ на $\partial\Omega(t,\varepsilon)$
- $\psi(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям



Асимптотическое решение: все то же самое, но уравнение и начальные условия удовлетворяются с точностью до $O(\varepsilon^{N+1})$, где N -- порядок асимптотического решения.

Ясно, что $\Omega(t,0) = \Omega_0$,
а при $\varepsilon > 0$ область «деформируется» и зависит от t.

Почему не получается непосредственно использовать регулярную теорию возмущений?

$$\mathcal{L}\psi + \varepsilon b(\psi, \nabla\psi) = 0, \qquad \psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)}, \quad \varepsilon \to 0$$

Хотим искать решение в виде $\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots,$ получаем последовательность «линейных» задач

$$\mathcal{L}\psi_0 = 0, \qquad \psi_0\big|_{t=0} = \psi^{(0)};$$

$$\mathcal{L}\psi_1 = -b(\psi_0, \nabla\psi_0), \qquad \psi_1\big|_{t=0} = 0;$$

$$\mathcal{L}\psi_2 = -b(\psi_0, \nabla\psi_1) - b(\psi_1, \nabla\psi_0), \qquad \psi_2\big|_{t=0} = 0;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

последовательно находим

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2 \ldots$$

Схема не работает, потому что задачи в действительности не являются линейными

Область, где определено решение, зависит от самого решения

- $\psi_0 + \varepsilon\psi_1$ должна быть определена не совсем там, где ψ_0;
- $\psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2$ должна быть определена не совсем там, где $\psi_0 + \varepsilon\psi_1$; и так далее

Таким образом, область нужно «остановить»

Хорошо известный случай, когда это удается сделать — одномерные уравнения мелкой воды с линейным дном

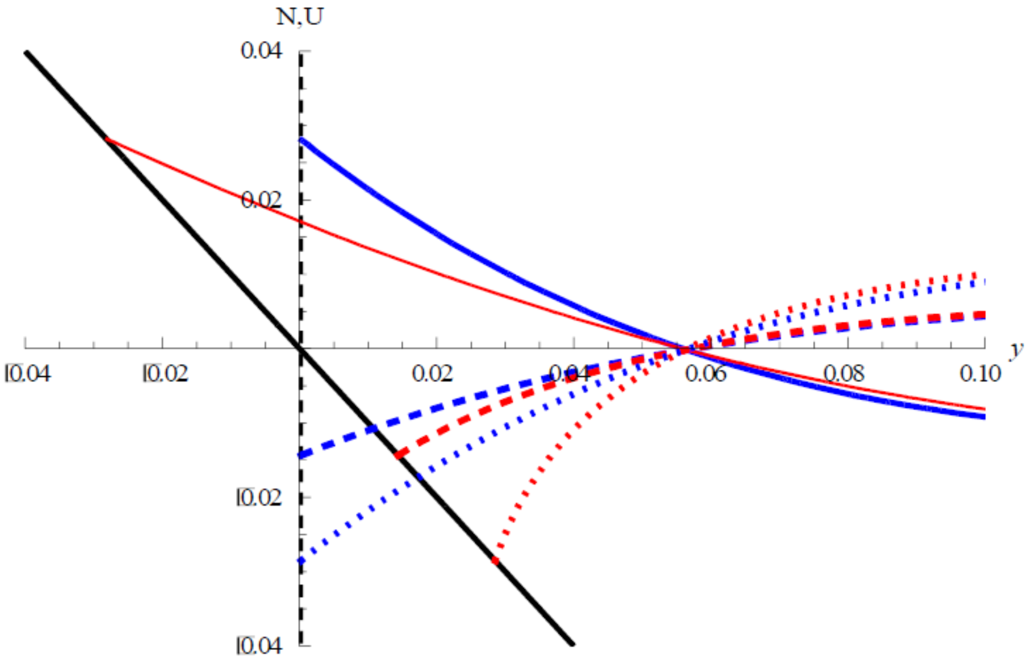
$$\eta_t + ((x+\eta)u)_x = 0, \qquad u_t + \eta_x + uu_x = 0.$$

Преобразование Кэрриера — Гринспена (1958)

$$t = \tau + U, \quad x = y - N + \frac{U^2}{2}, \quad \eta = N - \frac{U^2}{2}, \quad u = U$$

не только останавливает область, но и сводит нелинейную задачу к линейной для функций $(N(y,\tau), U(y,\tau))$:

$$N_\tau + (yU)y = 0, \qquad U_\tau + N_x = 0.$$



Если отличен от нуля якобиан

$$J = 1 - N_y + U_\tau + N_\tau U_y - N_y U_\tau + UU_y,$$

то решение нелинейной задачи восстанавливается по решению линейной в параметрическом виде. В общем случае такой «полный триумф» невозможен, но и не нужен. Достаточно остановить область.

Вспомогательная конструкция

Введем область $\Omega_\lambda = \{x|\ D(x) + \lambda > 0\}.$

Лемма. *Существует гладкое семейство диффеоморфизмов*

$F(\cdot,\lambda) = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$ *такое, что* $F(\cdot,0) = id,\quad F(\Omega_\lambda,\lambda) = \Omega_0.$

<u>Доказательство (и построение):</u>

Рассмотрим задачу Коши для системы ОДУ

$$\frac{d}{d\lambda}G(y,\lambda) = \frac{\nabla D(G(y,\lambda))}{|\nabla D(G(y,\lambda))|^2}\rho(y), \qquad G(y,0) = y$$

$\rho(y)$ -- срезающая функция,

$\rho(y) = 1$ вблизи $\partial\Omega_0$

$$\boxed{F(\cdot,\lambda) = G^{-1}(\cdot,\lambda)}$$

Редукция к системе уравнений в области Ω_0

Пусть (Ω,ψ) -- предполагаемое асимптотическое решение,

$\Omega=\Omega(t,\varepsilon)$. Формула $y=F(x,\varepsilon\eta(x,t,\varepsilon))$

$$\psi=\begin{pmatrix}\eta\\ u\end{pmatrix}$$

определяет замену переменных

$$\Omega(t,\varepsilon)\to\Omega_0, \qquad x\mapsto y,$$

и мы полагаем

$$\Psi(y,t,\varepsilon)=\psi(x,t,\varepsilon),$$

$$\Psi=\begin{pmatrix}N\\ U\end{pmatrix}$$

где x и y связаны этим диффеоморфизмом.

Функция $\Psi(y,t,\varepsilon)$ уже определена при $y\in\Omega_0$

для всех (t,ε)

Достаточно найти $\Psi(y,t,\varepsilon)$,

тогда $\psi(x,t,\varepsilon)$ определяется

параметрически:

$$\begin{cases}x=G(y,\varepsilon N(y,t,\varepsilon))\\ \psi=\Psi(y,t,\varepsilon)\end{cases}$$

Задача для функции Ψ в новых переменных

«малое возмущение»

$$\begin{cases} \mathcal{L}_y \Psi + \varepsilon B(\Psi, \nabla\Psi, \varepsilon) = 0 \\ \Psi\big|_{t=0} = \Psi^{(0)} \end{cases} \qquad y \in \overline{\Omega_0}, \qquad t \in [0, T]$$

В этой задаче область фиксирована; будем решать ее с помощью стандартной техники регулярной теории возмущений

с новой нелинейностью $B(\Psi, \nabla\Psi, \varepsilon)$:

$$B(\Psi, \nabla_y \Psi, \varepsilon) = -\begin{pmatrix} \mathscr{J}_2(\mathscr{J}_0 + \varepsilon\mathscr{J}_1)^{-1} N_y + \dfrac{\langle \nabla, D(y)\mathbf{U}\rangle - \langle (\mathscr{J}_0 + \varepsilon\mathscr{J}_1)^{-1}\nabla, \big(D(G(y, \varepsilon N)) + \varepsilon N\big)\mathbf{U}\rangle}{\varepsilon} \\ \mathscr{J}_2(\mathscr{J}_0 + \varepsilon\mathscr{J}_1)^{-1}\nabla\mathbf{U} - \langle \mathbf{U}, (\mathscr{J}_0 + \varepsilon\mathscr{J}_1)^{-1}\nabla\rangle\mathbf{U} - \dfrac{(\mathscr{J}_0 + \varepsilon\mathscr{J}_1)^{-1} - I}{\varepsilon} N_y \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{J}_0(y, \tau, \varepsilon) = G_y^{\mathrm{T}}(y, \varepsilon N(y, \tau, \varepsilon)),$$

$$\mathscr{J}_1(y, \tau, \varepsilon) = N_y(y, \tau, \varepsilon) G_\lambda^{\mathrm{T}}(y, \varepsilon N(y, \tau, \varepsilon)), \qquad \mathscr{J}_2(y, \tau, \varepsilon) = N_\tau(y, \tau, \varepsilon) G_\lambda^{\mathrm{T}}(y, \varepsilon N(y, \tau, \varepsilon))$$

T обозначает транспонирование матрицы

Асимптотическое решение задачи для $\Psi(y,t,\varepsilon)$

$$\mathcal{L}\Psi + \varepsilon B(\Psi,\nabla\Psi,\varepsilon) = 0, \qquad \Psi\big|_{t=0} = \Psi^{(0)}$$

Индекс y более не пишем

Будем искать решение в виде $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \ldots$, получаем последовательность «линейных» задач

$$\mathcal{L}\Psi_0 = 0, \qquad \Psi_0\big|_{t=0} = \Psi^{(0)};$$

$$\mathcal{L}\Psi_1 = -B(\Psi_0,\nabla\Psi_0), \qquad \Psi_1\big|_{t=0} = 0;$$

$$\mathcal{L}\Psi_2 = -B(\Psi_0,\nabla\Psi_1) - B(\Psi_1,\nabla\Psi_0), \qquad \Psi_2\big|_{t=0} = 0;$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

последовательно находим $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2 \ldots$

Оператор $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial_t & \nabla\cdot D(y) \\ g\nabla & \partial_t \end{pmatrix}$ вырождается на границе области: $D(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega.$

Наглядно видно из уравнения для $N(y)$: $\qquad N_{tt} - \langle \nabla, c^2(y)\nabla \rangle N = 0, \qquad c(y) = \sqrt{gD(y)}.$

О свойствах вырожденного оператора

Теорема. *Задача* $\mathcal{L}v = f, \qquad v\big|_{t=0} = v^{(0)},$

где $f \in C^\infty\left(\bar{\Omega}_0 \times [0,T]\right), \qquad v^{(0)} \in C^\infty\left(\bar{\Omega}_0\right),$

имеет единственное гладкое решение $v \in C^\infty\left(\bar{\Omega}_0 \times [0,T]\right).$

Набросок доказательства*:*

1. Задача сводится к задаче Коши для вырождающегося на $\partial\Omega_0$ волнового уравнения для возвышения свободной поверхности η :

$$\eta_{tt} - \langle \nabla, gD(x)\nabla \rangle \eta = F, \qquad \eta_{t=0} = \eta^{(0)}, \quad \eta_t\big|_{t=0} = \eta^{(1)}.$$

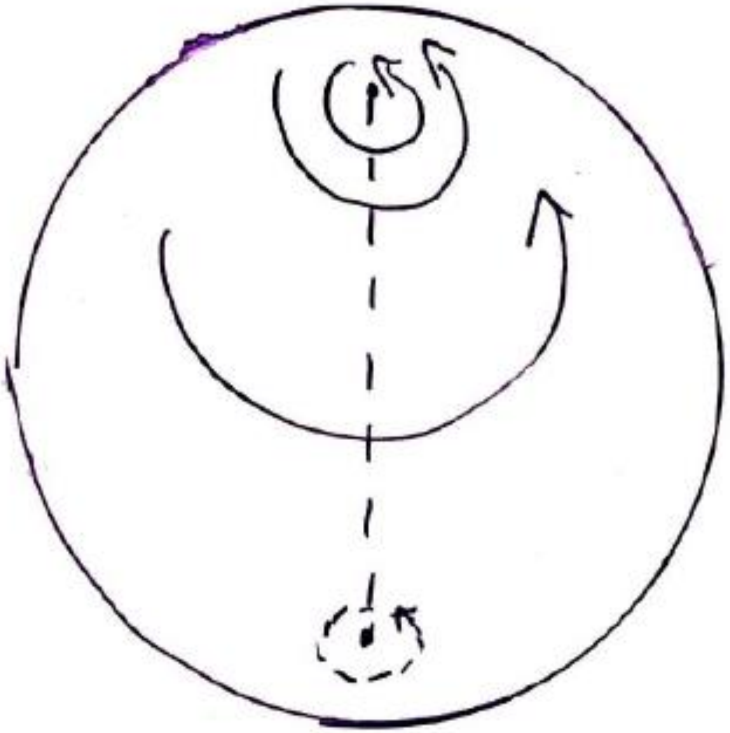
2. Уравнение поднимается на трехмерное многообразие X с действием группы $\mathbb{S}^1$: $X \to \bar{\Omega}_0 = X / \mathbb{S}^1$, на котором поднятое уравнение оказывается $\mathbb{S}^1$ -инвариантным, а его пространственная часть – гипоэллиптическим операторов в силу теорем Олейник и Радкевича (1971).
3. Единственное $\mathbb{S}^1$ -инвариантное решение задачи Коши на X спускается на $\overline{\Omega}_0$ и дает решение задачи на Ω_0.

Иллюстрация приема униформизации из доказательства теоремы

В качестве $\overline{\Omega_0}$ возьмем

$$[-1,1] = \mathbb{S}^2/\mathbb{S}^1$$

(одномерный случай).



Вырождающийся оператор:

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

Собственные функции – многочлены Лежандра $P_m(x)$

В результате поднятия получаем оператор Лапласа на сфере.
С помощью канонического оператора Маслова
получаем асимптотику

$$P_m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}J_0((m+1/2)\theta) + O(1/m)$$

E. Hilb, Über die Laplacesche Reihe, M. Zeitschrift, v. 5, pp. 17–25. (1919)

Основная теорема

Теорема. *Для любого* $N \in \mathbb{N}$ *задача*

$$\begin{cases} \eta_t + \langle \nabla, D(x)u \rangle + \varepsilon \langle \nabla, \eta u \rangle = 0 \\ u_t + g\nabla \eta + \varepsilon \langle u, \nabla \rangle u = 0 \\ \eta_{t=0} = \eta^{(0)}(x,\varepsilon), \quad u\big|_{t=0} = u^{(0)}(x,\varepsilon) \end{cases}$$

имеет асимптотическое решение с точностью до $O(\varepsilon^{N+1})$.
Это решение единственно с точностью до $O(\varepsilon^{N+1})$.

Практическое применение

Предположим, что нужно приближенно решить нелинейную задачу

$$\mathcal{L}\psi + b(\psi, \nabla\psi) = 0, \qquad \psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)} \quad \text{в области} \quad \bar{\Omega}_\psi = \{D(x) + \eta(x,t) \geqslant 0\}.$$

Ограничимся главным членом асимптотики (достаточно на практике).Тогда рецепт такой:

a) Решаем формально линеаризованную задачу

$$\mathcal{L}_y \Psi = 0, \quad \Psi\big|_{t=0} = \psi^{(0)}(y) \qquad \Psi = \begin{pmatrix} N \\ U \end{pmatrix}$$

b) Решение исходной задачи задаем параметрическими формулами

$$x = y - N(y,t)\frac{\rho(y)\nabla D(y)}{|\nabla D(y)|^2}, \quad \eta = N(y,t), \quad u = V(y,t).$$

Граница области Ω_t задается формулой $x = y - N(y,t)\dfrac{\nabla D(y)}{|\nabla D(y)|^2}, \qquad y \in \partial\Omega_0.$

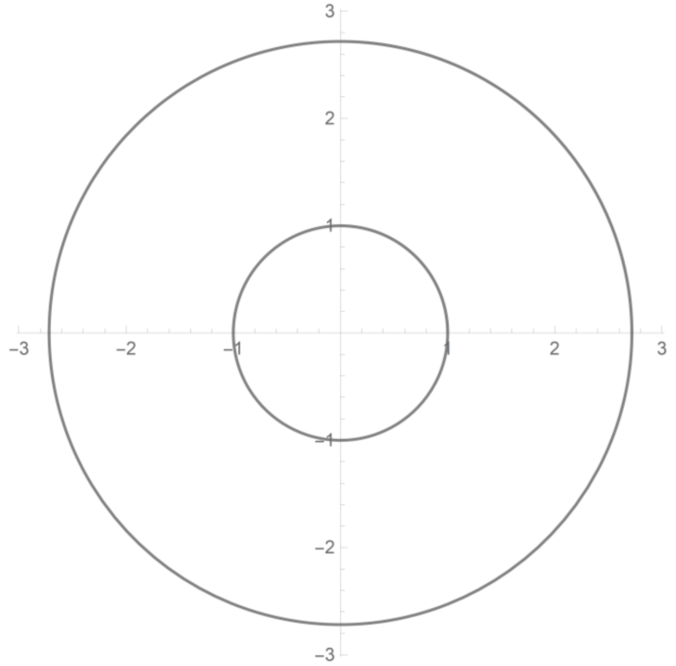
Равенство $D(x)+\eta(x,t)=0$ на $\partial\Omega_t$ выполнено приближенно:

$$D(x)+\eta(x,t)=D\left(y-N(y,t)\frac{\nabla D(y)}{|\nabla D(y)|^2}\right)+N(y,t)\approx$$

$$\approx D(y)-\left\langle \nabla D(y), N(y,t)\frac{\nabla D(y)}{|\nabla D(y)|^2}\right\rangle+N(y,t)=0,$$

$$y\in\partial\Omega_0.$$

Пример асимптотического решения



Кольцевая область.

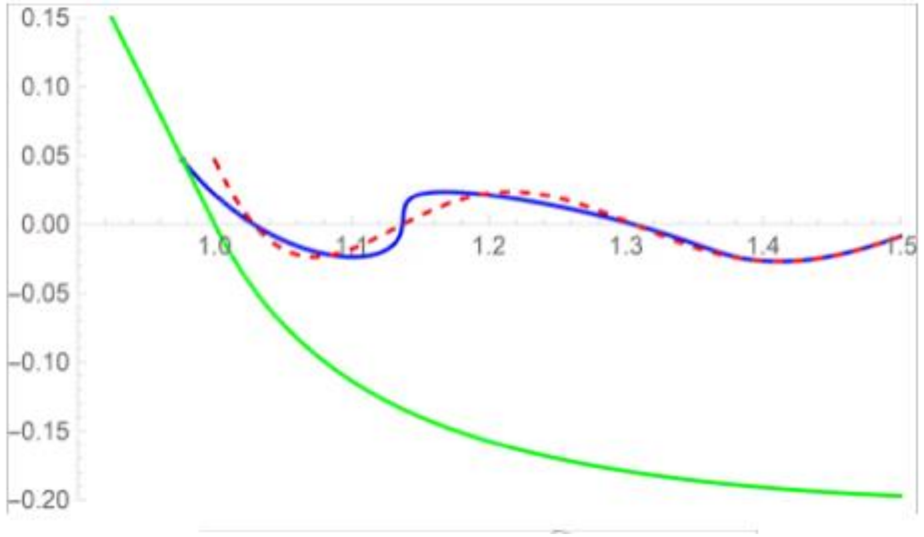
В координатах $(u, v) \in [a, b] \times S^1$

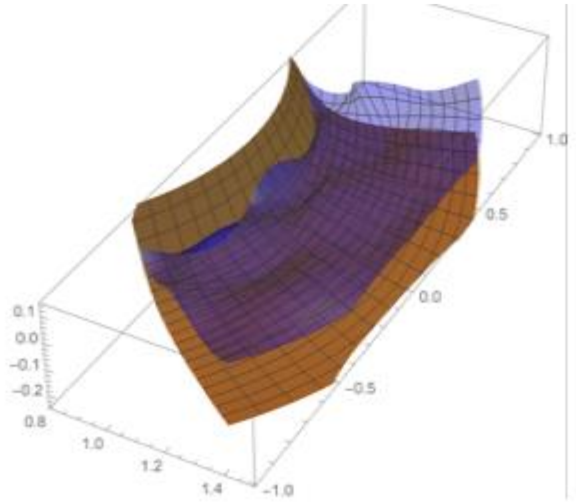
$$y_1 = \mathrm{e}^u \cos v \,, \qquad y_2 = \mathrm{e}^u \sin v$$

$$D(u, v) = \frac{1}{f(u) + g(v)}$$

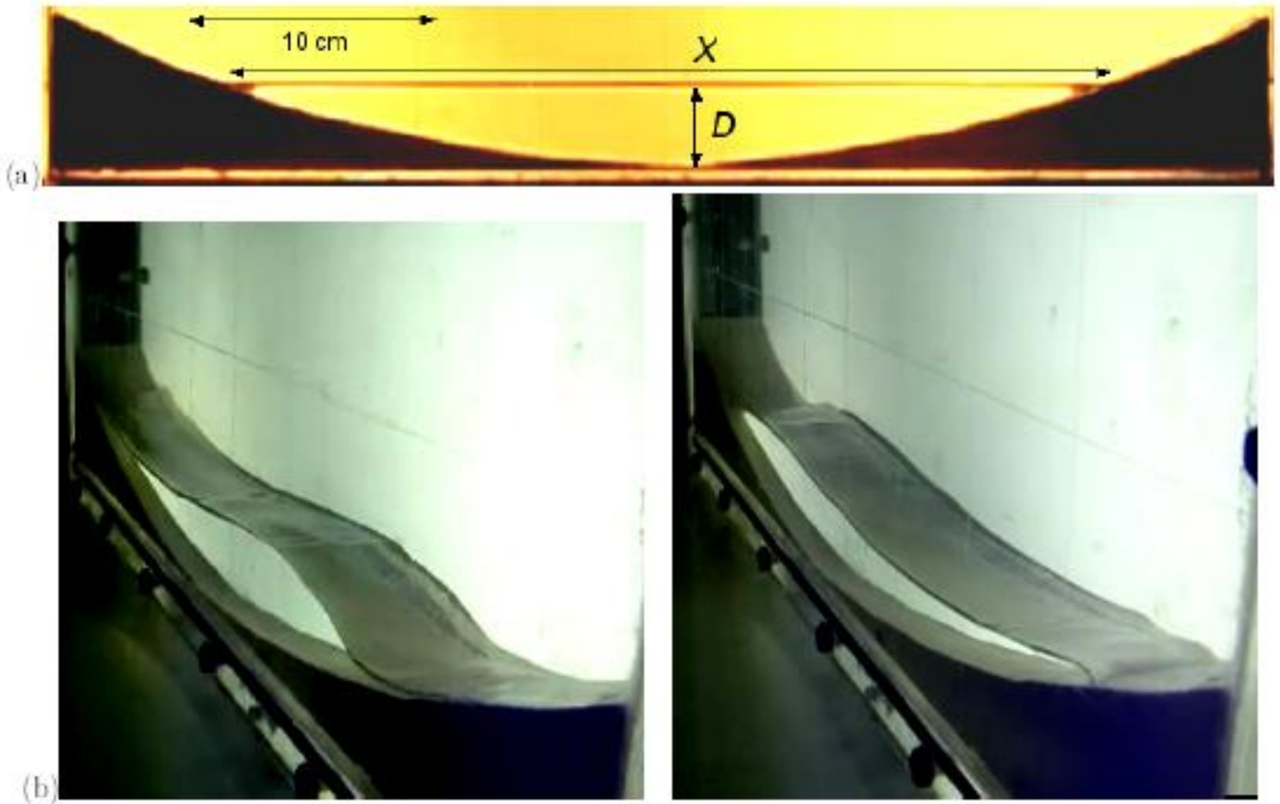
$$f(u) = \frac{1}{2u(1-u)}, \ \mathrm{g}(v) = 3 + \frac{1}{2}\sin v$$

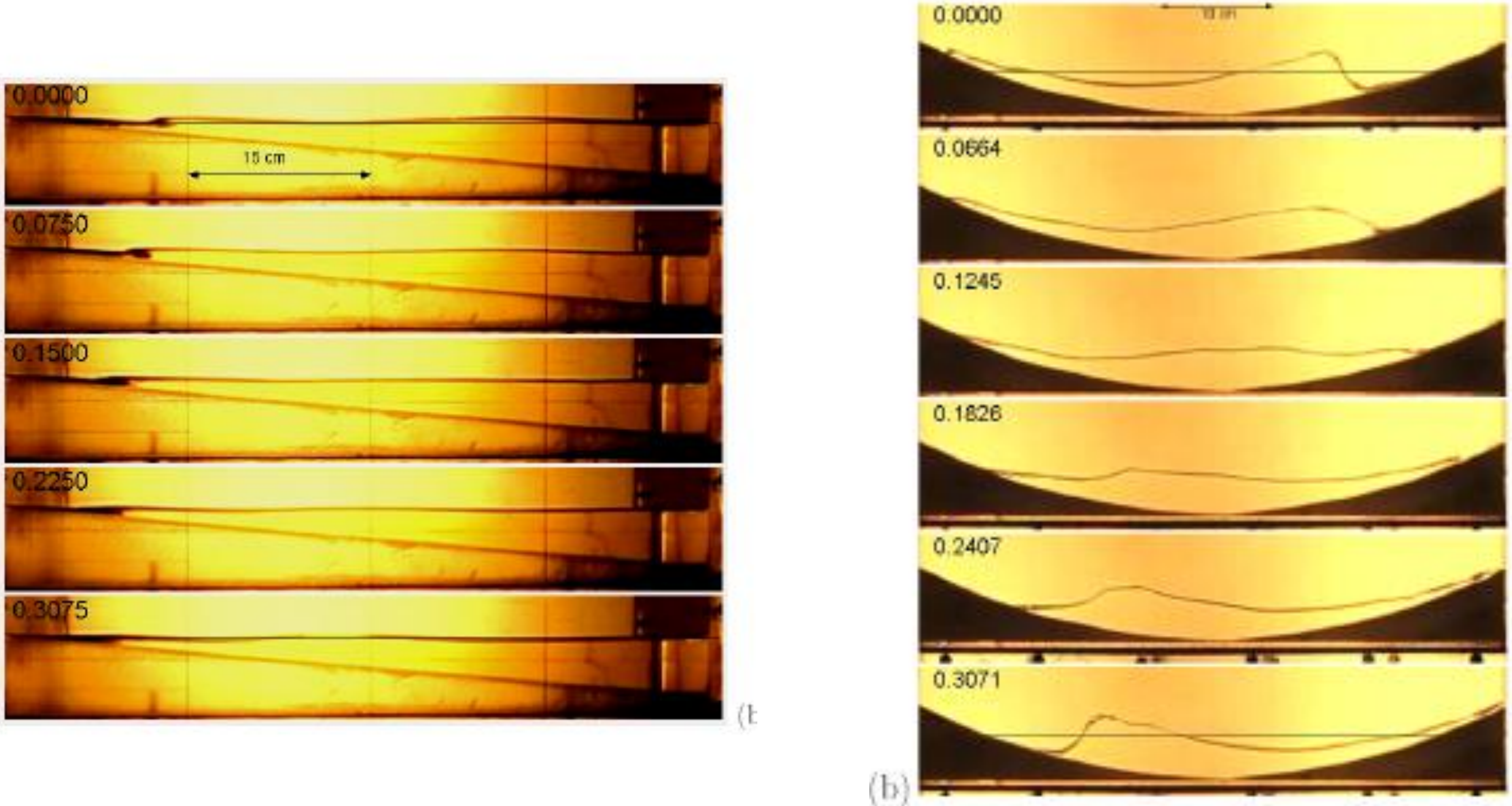
Линеаризованная задача $-(\hat{p}, D(y)\hat{p})\psi_\nu(y) = E\psi_\nu(y), \ \hat{p} = -ih\nabla_y$





Эксперименты на стенде «Динамика и структура осциллирующих течений» в ИПМех РАН




0.0000
15 cm
0.0750
0.1500
0.2250
0.3075
0.0000
0.0664
0.1245
0.1826
0.2407
0.3071
(a) (b)

Литература

[1] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, “Униформизация уравнений с граничным вырождением бесселева типа и квазиклассические асимптотики”, *Матем. Заметки* **107**:5 (2020), 780–786.

[2] Dobrokhotov, S.Y., Minenkov, D.S., Nazaikinskii, V.E. “Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently Sloping Beach”, *Russ. J. Math. Phys.* **29** (2022), 28–36.

[3] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. В. Цветкова, “Нелинейные эффекты и заплеск береговых волн, порожденных бильярдами с полужесткими стенками, в рамках теории мелкой воды”, *Труды МИАН* **322** (2023), 111–123.

[4] А. Ю. Аникин, С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, А. А. Толченников, “Униформизация и квазиклассические асимптотики для класса уравнений, вырождающихся на крае многообразия”, *Проблемы математического анализа* **122** (2023), 5–24.

[5] С. Ю. Доброхотов, В. А. Калиниченко, Д. С. Миненков, В. Е. Назайкинский, “Асимптотики длинных стоячих волн в одномерных бассейнах с пологими берегами: теория и эксперимент”, Прикладная математика и механика **87**:2 (2023), 157–175.

Спасибо за внимание

и

еще раз

Сердечные поздравления юбиляру!!!!!